



Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ingeniería

División de Ingeniería Eléctrica

Análisis de Circuitos Eléctricos
Proyecto PAPIME PE100920

Responsable: M.I. Gloria Mata Hernández
Elaboró: Fernando Rivera Pérez

Señal Coseno

La señal coseno que se muestra en la [Figura 1](#) tiene los siguientes parámetros básicos:

Gráfica de $v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi_v)$

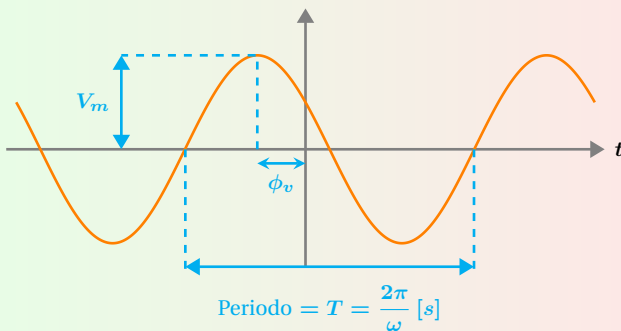


Figura 1: Amplitud V_m , periodo T y fase ϕ .

Frecuencia
angular

$$\omega = 2\pi f$$

Frecuencia

$$f = \frac{1}{T}$$

Fasores

Un fasor, es la representación en números complejos de una forma de onda sinusoidal.

Representación fasorial

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi_v) \Rightarrow \mathbb{V} = V_m \angle \phi_v$$

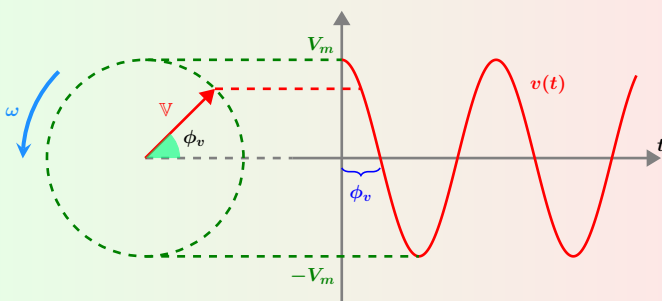


Figura 2: Fasor y onda sinusoidal.

Impedancia y Admitancia en CA

La impedancia en CA se define como la razón entre el fasor de voltaje y el fasor de corriente.

$$Z = \frac{\mathbb{V}}{\mathbb{I}} = \frac{V_m \angle \phi_v}{I_m \angle \phi_i} \quad Y = \frac{1}{Z}$$

Impedancia

En la forma rectangular R es la parte resistiva y X es la reactancia que puede ser inductiva o capacitiva. En forma polar θ_z es el ángulo de la impedancia.

Forma rectangular

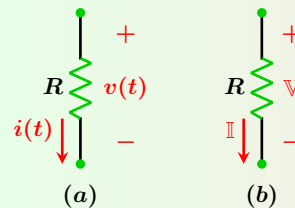
$$Z = R + jX$$

Forma polar

$$Z = |Z| \angle \theta_z$$

Impedancia Resistiva

Representación de una resistencia en (a) dominio del tiempo, (b) notación fasorial.

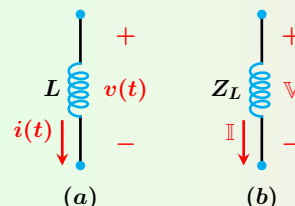


Impedancia
Resistiva

$$Z_R = R$$

Impedancia Inductiva

Representación de un inductor en (a) dominio del tiempo, (b) notación fasorial.

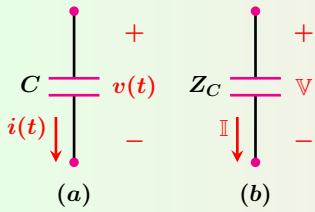


Impedancia
Inductiva

$$Z_L = j\omega L$$

Impedancia Capacitiva

Representación de una resistencia en (a) dominio del tiempo, (b) notación fasorial.



Impedancia Capacitiva

$$Z_C = \frac{-j}{\omega C}$$

Reactancia

La reactancia del capacitor y del inductor son:

Reac. Capacitiva

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

Reac. Inductiva

$$X_L = \omega L$$

Números complejos

La relación entre la forma polar y rectangular de un número complejo se muestra en la [Figura 3](#).

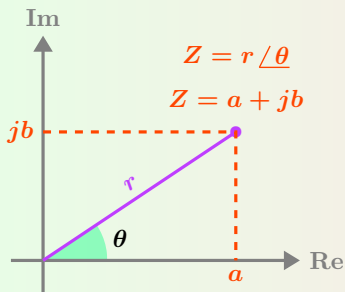


Figura 3: Plano complejo.

Conversiones

$$\begin{aligned} a &= r \cos(\theta) \\ b &= r \sin(\theta) \\ r &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ \theta &= \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \end{aligned}$$

Proyecto PAPIME PE100920

Responsable: M.I. Gloria Mata Hernández

Elaboró: Fernando Rivera Pérez

Operaciones con fasores

El análisis con fasores se realiza con operaciones algebraicas con números complejos. Sean $Z_1 = a + jb$ y $Z_2 = c + jd$ dos números complejos en forma rectangular, las operaciones básicas son:

- 1 $Z_1 + Z_2 = (a + c) + (b + d)j$
- 2 $Z_1 - Z_2 = (a - c) + (b - d)j$
- 3 $Z_1 Z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)j$
- 4 $\frac{Z_1}{Z_2} = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}\right) + \left(\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right)j$

Operaciones con fasores 2

Sean $Z_A = Z_1 / \theta_1$ y $Z_B = Z_2 / \theta_2$ dos números complejos en forma polar, las operaciones básicas son:

Recíproco

$$Y_1 = \frac{1}{Z_A} = \frac{1}{Z_1} \angle -\theta_1$$

Conjugado

$$Z_A^* = Z_1 \angle -\theta_1$$

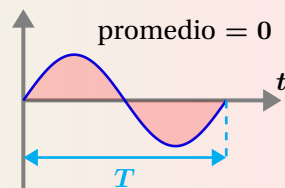
- 1 $Z_A Z_B = Z_1 Z_2 \angle \theta_1 + \theta_2$
- 2 $\frac{Z_A}{Z_B} = \frac{Z_1}{Z_2} \angle \theta_1 - \theta_2$

Valor medio

Para una función $v(t)$ con período T el valor medio es:

Valor medio

$$V_{\text{med}} = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) dt$$



Valor RMS

Para una función $v(t)$ con período T el valor RMS es:

Fórmula general

$$V_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt}$$

Senoidal

$$V_{\text{rms}} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

Funciones trigonométricas

- 1 $\cos(\theta) = \sin(\theta + 90^\circ)$
- 2 $\sin(\theta) = \cos(\theta - 90^\circ)$
- 3 $-\cos(\theta) = \sin(\theta - 90^\circ)$

Circuito Resonante en serie

El circuito de la **Figura 4** opera en la frecuencia de resonancia ω_0 .

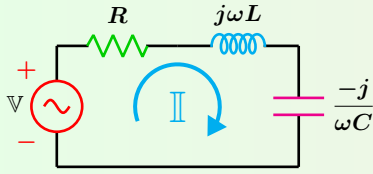


Figura 4: Circuito.

Frecuencia Resonante

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Forma rectangular

$$Z_T = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

Resultante

$$Z_T = R$$

La magnitud de la impedancia en función de la frecuencia angular se representa en la **Figura 5** y el ángulo de fase como función de la frecuencia angular se muestra en la **Figura 6**.

En ambas gráficas, para valores menores que la frecuencia de resonancia, el circuito es predominantemente capacitivo y para valores mayores es predominantemente inductivo.

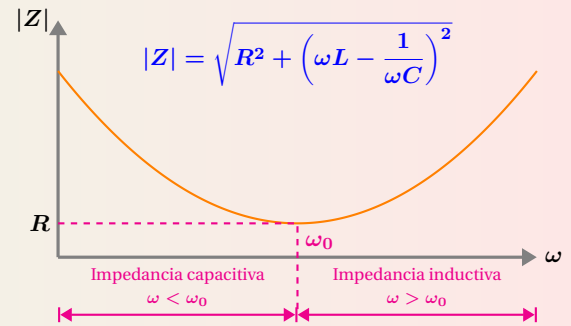


Figura 5: $|Z|$ en función de la frecuencia ω .

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega RC}\right)$$

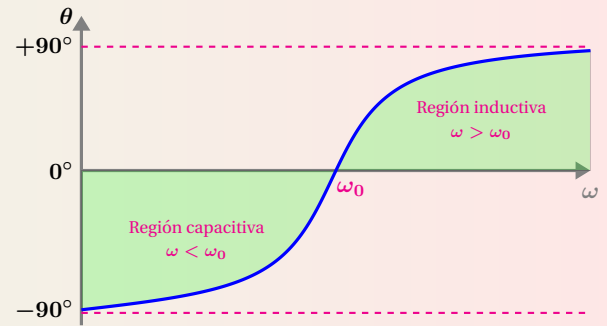


Figura 6: θ en función de la frecuencia ω .

Corriente vs Frecuencia

Corriente en función de la frecuencia angular ω del circuito de la **Figura 4**. Las frecuencias de corte se localizan al 70 % de la corriente máxima.

$$I(\omega) = \frac{|V|}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

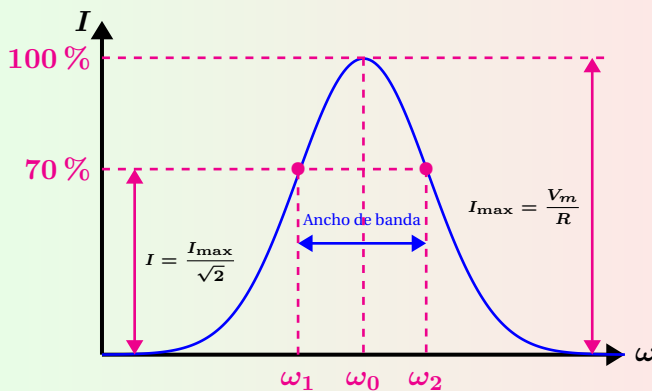


Figura 7: Corriente contra frecuencia angular.

Potencia vs Frecuencia

Potencia en función de la frecuencia angular ω del circuito mostrado en la **Figura 4**. Las frecuencias de corte se localizan cuando el circuito disipa la mitad de la potencia máxima.

$$P(\omega) = \frac{|V|^2 R}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

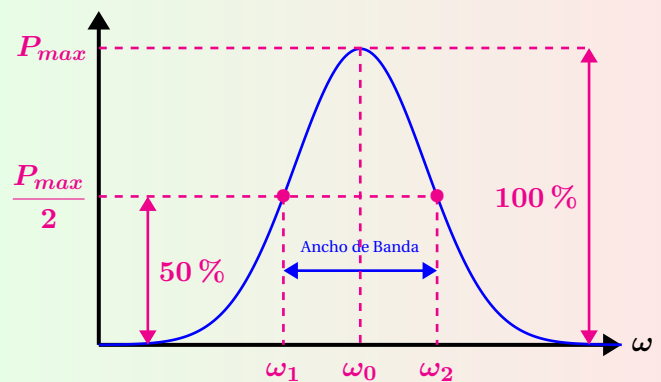


Figura 8: Potencia contra frecuencia angular.

Voltajes

Expresiones de voltaje en los elementos en la frecuencia de resonancia ω_0 , gráficas en la Figura 10.

- 1 $v_R(t) = v(t) = V_m \cos(\omega_0 t)$
- 2 $v_L(t) = |I| |Z_L| \cos(\omega_0 t + 90^\circ)$; $Z_L = jX_L$
- 3 $v_C(t) = |I| |Z_C| \cos(\omega_0 t - 90^\circ)$; $Z_C = -jX_C$

Factor de calidad

Expresiones para obtener el factor de calidad Q de un circuito RLC en serie a la frecuencia de resonancia ω_0 .

- 1 $Q = \frac{\omega_0 L}{R}$
- 2 $Q = \frac{1}{\omega_0 C R}$
- 3 $Q = \frac{|V_L|}{|V|}$
- 4 $Q = \frac{|V_C|}{|V|}$

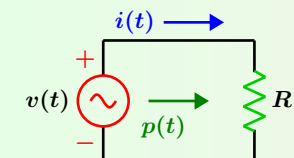
Ancho de banda

Expresiones para obtener el ancho de banda del circuito RLC en serie.

- 1 $AB = \omega_2 - \omega_1$
- 2 $AB = \frac{R}{L}$
- 3 $AB = \frac{\omega_0}{Q}$
- 4 $AB = \frac{f_0}{Q}$ [Hz]

Potencia Activa

El voltaje y corriente están en fase por lo que $\phi_v = \phi_i$. V e I representan magnitudes rms.



$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi_v)$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi_i)$$

Figura 12: Potencia.

$$\theta = \phi_v - \phi_i$$

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\phi_v - \phi_i)$$

$$P = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \cos(\theta)$$

$$P = VI$$

$$P = \frac{V^2}{R}$$

$$P = I^2 R$$

Gráficas

Desfase de 180° en el voltaje de los elementos reactivos.

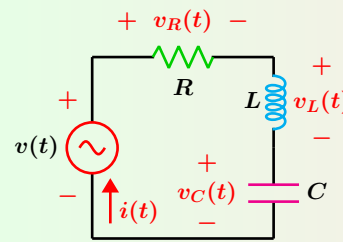


Figura 9: Circuito.

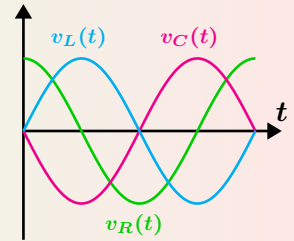


Figura 10: Voltajes.

Factor de calidad del inductor

El factor de calidad del inductor real que se muestra en la Figura 11 y para cualquier frecuencia ω es:

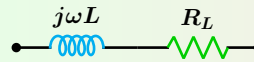


Figura 11: Inductor real.

$$Q = \frac{\omega L}{R_L}$$

Frecuencias de corte

Las frecuencias de corte y la frecuencia de resonancia para el circuito RLC en serie se relacionan mediante:

- 1 $\omega_1 = \frac{-R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}}$
- 2 $\omega_2 = \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}}$
- 3 $\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$

Potencia instantánea $p(t) = v(t)i(t)$

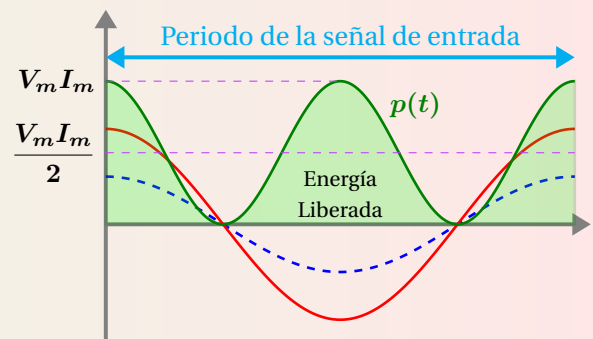


Figura 13: Potencia en una resistencia.

Circuito Resonante en paralelo

El circuito RLC en paralelo de la Figura 14 opera en la frecuencia de resonancia ω_0 .

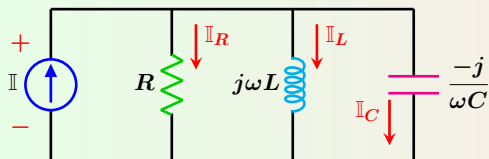


Figura 14: Circuito Resonante.

Forma Rectangular

$$Y = \frac{1}{R} + j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)$$

En resonancia

$$Z_T = R$$

Frec resonante

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Q = \omega_0 RC$$

Proyecto PAPIME PE100920

Responsable: M.I. Gloria Mata Hernández

Elaboró: Fernando Rivera Pérez

Expresiones

Expresiones complementarias para el circuito de la Figura 14.

$$1 \quad AB = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{RC}$$

$$2 \quad \omega_1 = \frac{-1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

$$3 \quad \omega_2 = \frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

Circuito resonante paralelo real

La frecuencia de resonancia y parámetros del circuito mostrado en la Figura 15 son:

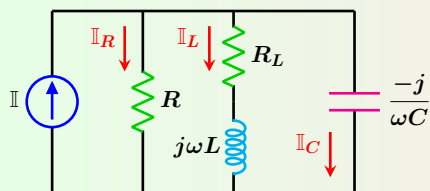


Figura 15: Circuito resonante.

Impedancia Total

$$Z_T = \frac{LR}{L + CRR_L}$$

Frec resonancia

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R_L}{L}\right)^2}$$

Factor de calidad

$$Q = \omega_0 Z_T C$$

Voltaje máximo

$$V_m = Z_T I_m$$

Expresiones

Las frecuencias de corte para el circuito de la Figura 15 se obtienen resolviendo de forma simultánea las ecuaciones siguientes:

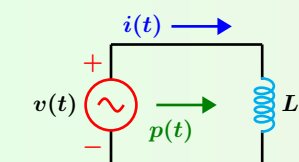
$$\frac{1}{R} + \frac{R_L}{R_L^2 + (\omega L)^2} = \frac{I_m \cos(\phi_i - \phi_v)}{\frac{V_m}{\sqrt{2}}}$$

$$\omega C - \frac{\omega L}{R_L^2 + (\omega L)^2} = \frac{I_m \sin(\phi_i - \phi_v)}{\frac{V_m}{\sqrt{2}}}$$

ϕ_v son los ángulos de los voltajes que se obtienen en las frecuencias de corte.

Potencia en el inductor

En un circuito puramente inductivo, el voltaje adelanta a la corriente en 90° , por lo que $\theta = \phi_v - \phi_i = 90^\circ$. En potencia eléctrica, V e I representan magnitudes rms.



$$v(t) = V_m \cos(\omega t + 90^\circ)$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t)$$

Potencia Reactiva

$$Q = VI \sin(\theta) \text{ [VAR]}$$

$$Q_L = VI$$

$$Q_L = \frac{V^2}{X_L}$$

$$Q_L = I^2 X_L$$

Figura 16: Potencia.

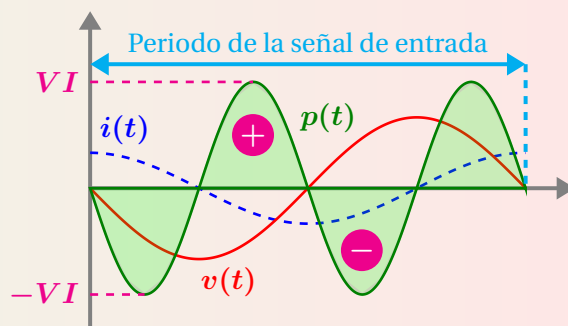


Figura 17: Potencia en un inductor.

Transformación Serie - Paralelo RL

Equivalencia serie - paralelo válida solamente en la misma frecuencia de operación ω .

Transformación Serie - Paralelo

$$R_P = \frac{R_S^2 + X_{LS}^2}{R_S} \quad X_{LP} = \frac{R_S^2 + X_{LS}^2}{X_{LS}}$$

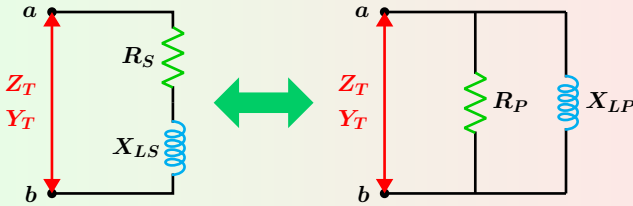


Figura 18: Circuitos equivalentes.

Transformación Paralelo - Serie

$$R_S = \frac{R_P X_{LP}^2}{R_P^2 + X_{LP}^2} \quad X_{LS} = \frac{R_P^2 X_{LP}}{R_P^2 + X_{LP}^2}$$

Transformación Serie - Paralelo RC

Equivalencia serie - paralelo válida solamente en la misma frecuencia de operación ω .

Transformación Serie - Paralelo

$$R_P = \frac{R_S^2 + X_{CS}^2}{R_S} \quad X_{CP} = \frac{R_S^2 + X_{CS}^2}{X_{CS}}$$

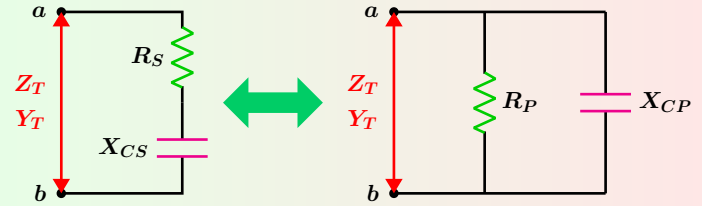


Figura 19: Circuitos equivalentes.

Transformación Paralelo - Serie

$$R_S = \frac{R_P X_{CP}^2}{R_P^2 + X_{CP}^2} \quad X_{CS} = \frac{R_P^2 X_{CP}}{R_P^2 + X_{CP}^2}$$

Escalamiento en impedancia

Cada impedancia del circuito se multiplica por K_m (factor de escalamiento de magnitud o de impedancia) permaneciendo la frecuencia sin cambio alguno.

- 1 $R_n = K_m R$
- 2 $L_n = K_m L$
- 3 $C_n = \frac{C}{K_m}$
- 4 $\omega_n = \omega$

R_n , L_n y C_n son los nuevos valores de la impedancias después de efectuado el escalamiento.

Escalamiento en frecuencia

La multiplicación por K_f (factor de escalamiento de frecuencia) solo afecta a las impedancias capacitivas e inductivas que dependen de la frecuencia.

- 1 $R_n = R$
- 2 $L_n = \frac{L}{K_f}$
- 3 $C_n = \frac{C}{K_f}$
- 4 $\omega_n = K_f \omega$

R_n , L_n y C_n son los nuevos valores de la impedancias después de efectuado el escalamiento.

Potencia en el capacitor

En un circuito puramente capacitivo, la corriente adelanta al voltaje en 90° , por lo que $\theta = \phi_v - \phi_i = -90^\circ$. En potencia eléctrica, V e I representan magnitudes rms.

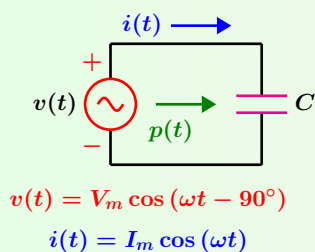


Figura 20: Potencia.

Potencia Reactiva

$$Q = VI \sin(\theta) \text{ [VAR]}$$

$$Q_C = VI$$

$$Q_C = I^2 X_C$$

$$Q_C = \frac{V^2}{X_C}$$

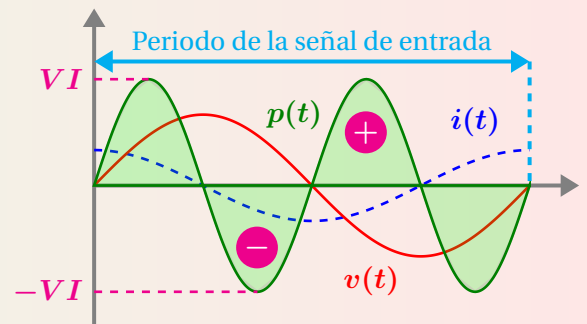


Figura 21: Potencia en un capacitor.