

CIRCUITOS II

1.4. Impedancia y Admitancia

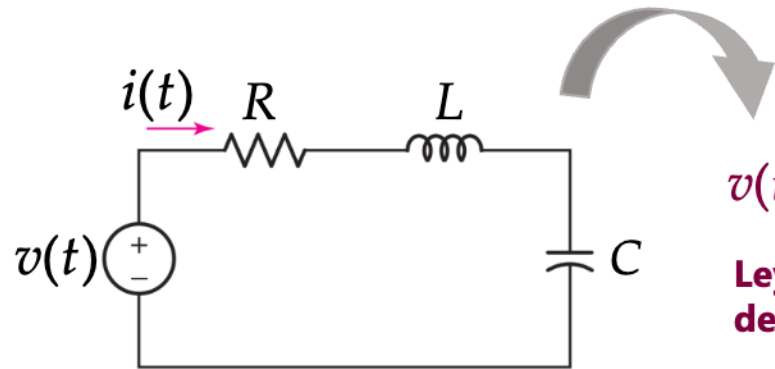
- Voltaje Fasorial para Elementos RLC
- Impedancia
- Admitancia



Voltaje Fasorial para Elementos RLC

Ecuaciones de Circuitos RLC en Forma Fasorial

En la clase 1.3 se vio cómo era posible simplificar drásticamente las ecuaciones de un circuito RLC utilizando fasores.



$$v(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \int i(t) dt$$

Ley de Kirchhoff en el dominio del tiempo



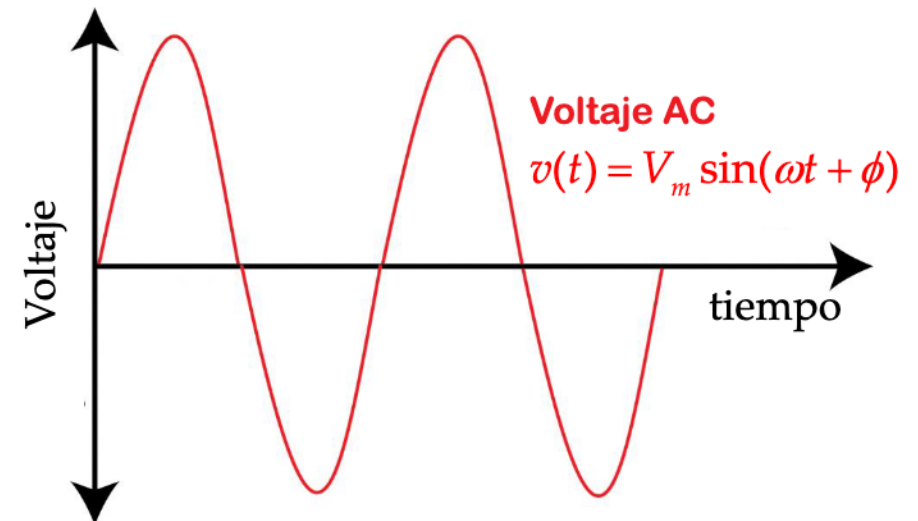
$$\tilde{V} = R\tilde{I} + sL\tilde{I} + \frac{1}{sC}\tilde{I}$$

Ley de Kirchhoff en forma fasorial

$$v(t) = V_m e^{-\sigma t} \cos(\omega t + \phi)$$

En circuitos eléctricos con señales de corriente alterna (AC) en estado estable no hay amortiguamiento; es decir, $v(t) = V_m \sin(\omega t + \phi)$. De modo que s se reduce a $j\omega$. Entonces, la ley de Kirchhoff puede escribirse como:

$$s = j\omega \Rightarrow \tilde{V} = R\tilde{I} + j\omega L\tilde{I} + \frac{1}{j\omega C}\tilde{I}$$



Voltaje en Forma Fasorial (Forma General)

Basado en lo anterior, podemos reescribir la ecuación de voltaje AC para cada elemento de un circuito RLC, tal como lo indica la siguiente tabla.

$$\mathbf{s} = \sigma + j\omega$$

Ecuación de Voltaje para Elementos RLC

elemento	d. del tiempo	forma fasorial
R	$v(t) = Ri(t)$	$\tilde{V} = R\tilde{I}$
L	$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$	$\tilde{V} = sL\tilde{I}$
C	$v(t) = \frac{1}{C}\int i(t) dt$	$\tilde{V} = \frac{1}{sC}\tilde{I}$

Voltaje en Forma Fasorial (Estado Estable)

$$s = j\omega$$

Ecuación de Voltaje para Elementos RLC (estado estable)

elemento	d. del tiempo	forma fasorial
R	$v(t) = Ri(t)$	$\tilde{V} = R\tilde{I}$
L	$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$	$\tilde{V} = j\omega L \tilde{I}$
C	$v(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$	$\tilde{V} = \frac{1}{j\omega C} \tilde{I}$

Impedancia

Impedancia (Estado Estable)

Utilizando la forma fasorial, obtenemos la relación entre voltaje y corriente para cada uno de los elementos de un circuito RLC.

$$\frac{\tilde{V}}{\tilde{I}} = R$$

Resistor

$$\frac{\tilde{V}}{\tilde{I}} = j\omega L$$

Inductor

$$\frac{\tilde{V}}{\tilde{I}} = \frac{1}{j\omega C}$$

Capacitor

Para el caso de una resistencia, esta relación es la ley de Ohm, que ya conocemos. Sin embargo, vemos que para el inductor y el capacitor, la relación voltaje/corriente nos da una cantidad imaginaria. De modo que si quisiéramos establecer esta relación de modo general (como la ley de Ohm para cualquier elemento en un circuito AC), tendríamos que utilizar un número complejo que pueda ser real y/o imaginario.

$$\frac{\tilde{V}}{\tilde{I}} = Z$$

A este número complejo Z se le llama **impedancia**. Su parte real corresponde a la **resistencia** y su parte imaginaria es llamada **reactancia**. La unidad de la impedancia es el Ohm (Ω).

$$Z = R \pm jX$$

Resistencia $\uparrow$ $\uparrow$ Reactancia

Impedancia (Caso General)

$$Z = R$$

Resistor

$$Z = sL$$

Inductor

$$Z = \frac{1}{sC}$$

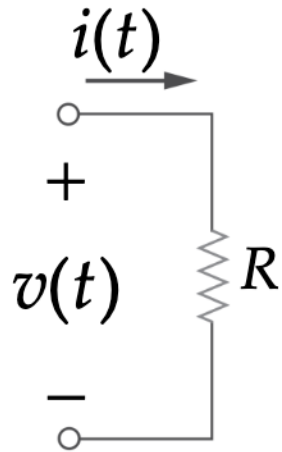
Capacitor

$$Z = R \pm jX$$

Resistencia $\uparrow$ $\uparrow$ Reactancia

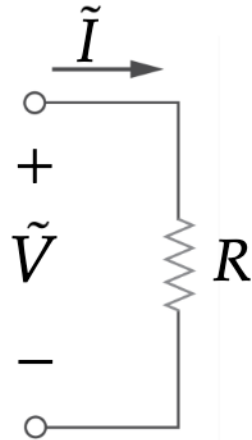
Voltaje y Corriente AC en un Resistor

dom. del tiempo



$$v(t) = i(t)R$$

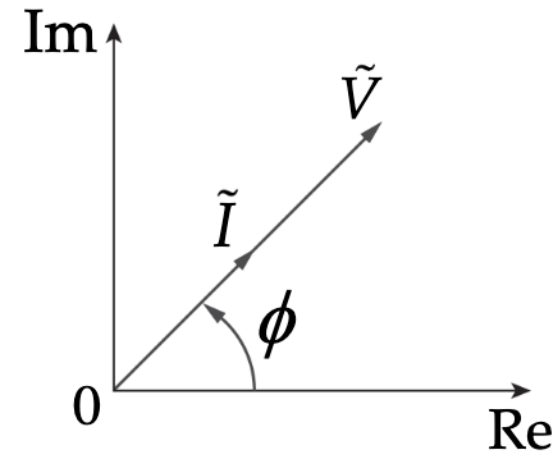
dom. fasorial



$$\tilde{V} = \tilde{I}R$$

En el caso de un resistor, la impedancia Z se reduce a la resistencia R .

$$Z = R + \cancel{jX}^0 \Rightarrow Z = R$$



Fase del voltaje respecto a la corriente

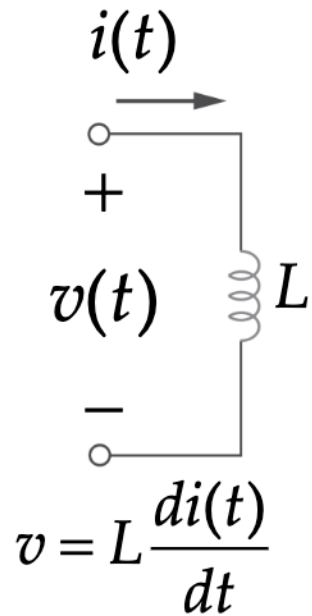
$$\tilde{I} = I_m e^{j\phi}$$

$$\tilde{V} = \tilde{I}R = I_m R e^{j\phi}$$

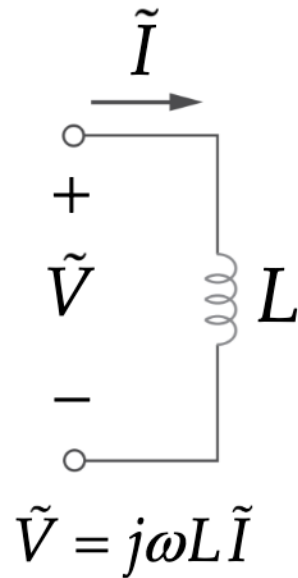
El voltaje y la corriente mantienen la misma fase ϕ .

Voltaje y Corriente AC en un Inductor

dom. del tiempo



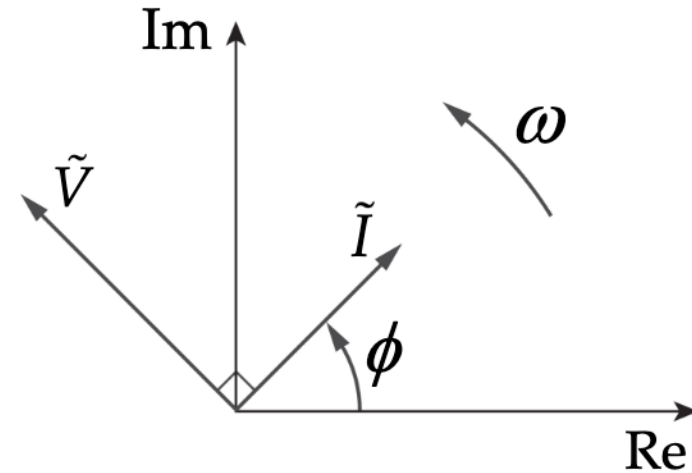
dom. fasorial



En el caso de un inductor, la impedancia Z se reduce a la reactancia ω . Es decir,

$$X = \omega$$

$$Z = \cancel{R}^0 + jX \Rightarrow Z = j\omega$$



Fase del voltaje respecto a la corriente

$$\tilde{I} = I_m e^{j\phi}$$

$$j = e^{j90^\circ}$$

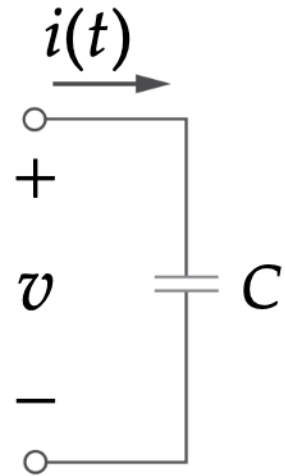
$$\tilde{V} = j\omega L \tilde{I} = e^{j90^\circ} \omega L (I_m e^{j\phi})$$

$$\tilde{V} = \omega L I_m e^{(\phi + 90^\circ)}$$

El voltaje adelanta a la corriente por 90°.

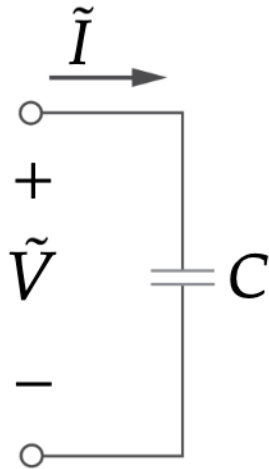
Voltaje y Corriente AC en un Capacitor

dom. del tiempo



$$v = \frac{1}{C} \int i dt$$

dom. fasorial

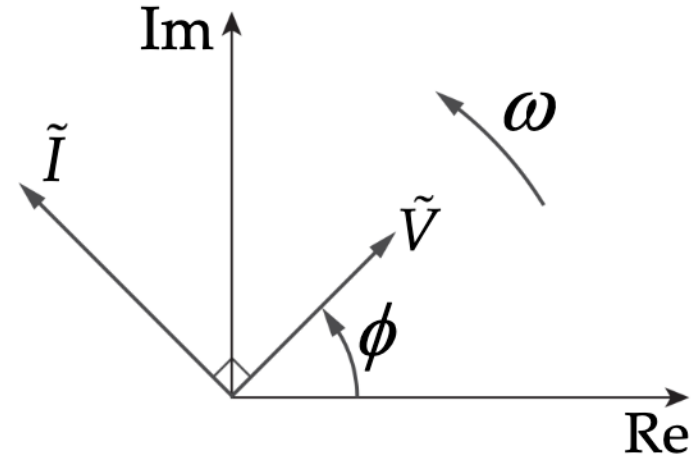


$$\tilde{V} = \frac{1}{j\omega C} \tilde{I}$$

En el caso de un capacitor, la impedancia Z se reduce a la reactancia $-\omega$. Es decir,

$$X = -\omega$$

$$Z = \cancel{R} + jX \Rightarrow Z = -j\omega$$



Fase del voltaje respecto a la corriente

$$\tilde{I} = I_m e^{j\phi}$$

$$\tilde{V} = \frac{1}{j\omega C} \tilde{I} = e^{-j90^\circ} \frac{1}{\omega C} (I_m e^{j\phi})$$

$$\tilde{V} = \frac{1}{\omega C} I_m e^{(\phi - 90^\circ)}$$

La corriente se adelanta al voltaje por 90° .

Signo de la Reactancia

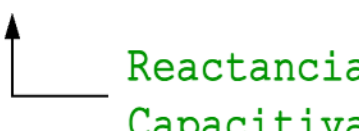
Muy raramente se encontraran circuitos puramente resistivos, puramente inductivos o puramente capacitivos. Más bien, los circuitos se componen de la combinación de al menos dos de estos elementos. De modo que, por lo general, al tomar la medida de la impedancia en un punto del circuito, nos encontraremos con una impedancia que tiene las componente real e imaginaria. El signo de la parte imaginaria, no indica la naturaleza del circuito.

Si la reactancia es positiva, se dice que es inductiva

$$Z = R + jX$$


Reactancia
Inductiva

Si la reactancia es negativa, se dice que es capacitiva

$$Z = R - jX$$


Reactancia
Capacitiva

Significado Físico de la Parte Real de Z (1/2)

Estamos acostumbrados a ver la resistencia como la oposición al paso de la corriente. Entre más resistencia, menos corriente y viceversa. De modo que al controlar resistencia en los circuitos eléctricos, podemos también controlar los niveles de corriente y voltaje.

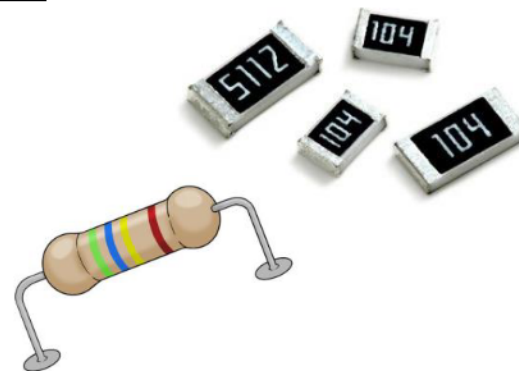


Si bien es cierto esta definición tiene veracidad, la misma no está completa.

La resistencia nos indica que se está realizando un trabajo al transformar la energía eléctrica en otro tipo de energía.

R: resistencia

I: corriente

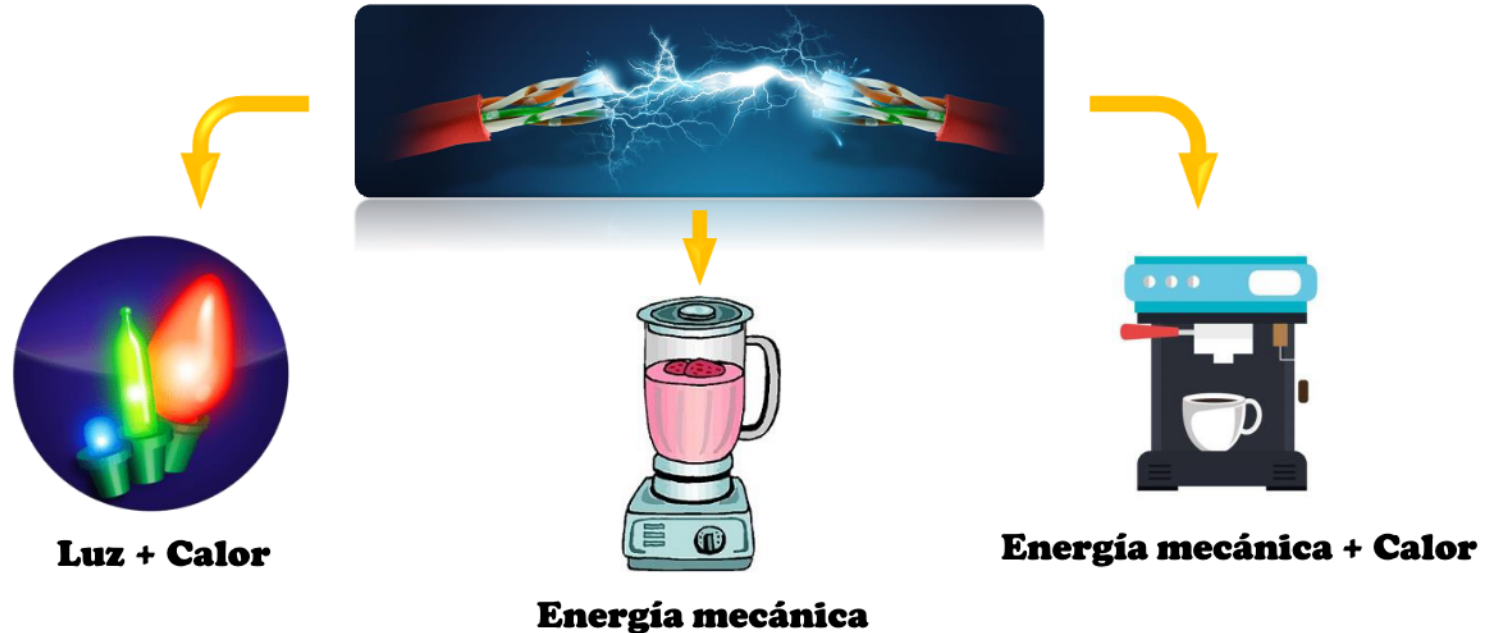


Por ejemplo, en los resistores, trabajo es realizado al transformar la energía eléctrica a calor (transferencia de energía térmica).

Significado Físico de la Parte Real de Z (2/2)

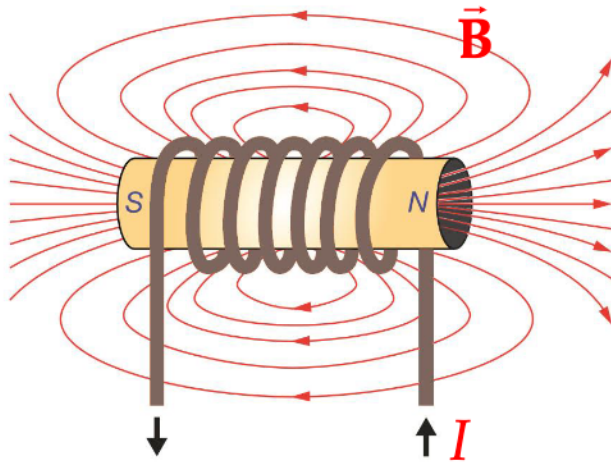
Así también, cuando conectamos un aparato (carga) a un circuito eléctrico para que se pueda realizar una acción específica (trabajo), dicho aparato también es considerado una resistencia, desde el punto de vista eléctrico.

Aquí, parte de la energía potencial eléctrica se transforma en otras clases de energía, como lo son la energía térmica, energía lumínica, mecánica, etc.



Significado Físico de la Parte Imaginaria de Z (1/x)

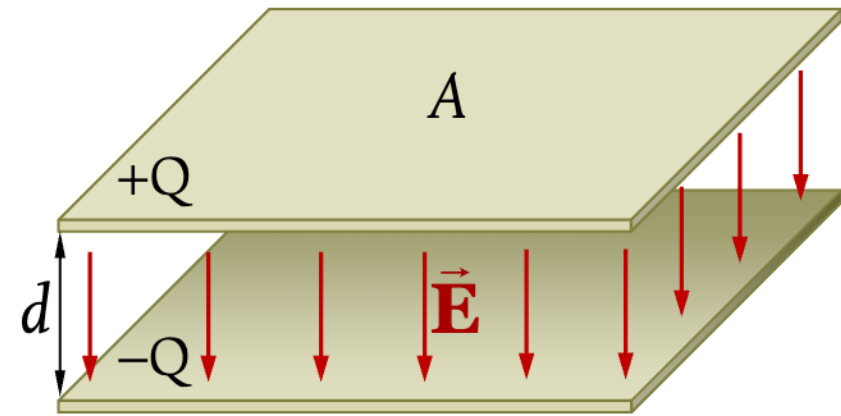
Inductor



Un inductor almacena energía en forma de Campo Magnético

$$Z = jX$$

Capacitor



Un Capacitor almacena energía a través del campo eléctrico en su interior

$$Z = -jX$$

Idealmente, ni el inductor ni el capacitor realizan trabajo, sólo almacenan de energía.

De aquí, podemos inferir que la reactancia X indica de que la energía no está siendo utilizada para hacer ningún trabajo real. Sino que está siendo almacenada, ya sea a través de un campo eléctrico o magnético.

Admittancia

Admitancia

En muchos circuitos se puede presentar el caso donde es más conveniente trabajar con el inverso de la impedancia que con impedancia directa.

$$\frac{1}{Z} = Y$$

El inverso de la impedancia se define como **admitancia**. Su parte real es la **conductancia** y su parte imaginaria es la **susceptancia**.

$$Y = G \pm jB$$

Conductancia ↑ ↑ Susceptancia

La unidad de medida de la admitancia es el siemens (S).

Relación Entre los Componentes de la Impedancia y Admitancia

Inverso de la impedancia

$$\begin{aligned}\frac{1}{Z} &= \frac{1}{R + jX} \\ &= \frac{1}{R + jX} \cdot \frac{R - jX}{R - jX} \\ &= \frac{R - jX}{R^2 - jRX + jRX - j^2X^2} \\ &= \frac{R - jX}{R^2 + X^2}\end{aligned}$$

Entonces la admitancia corresponde a:

$$Y = \frac{R - jX}{R^2 + X^2}$$

Donde

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2} \quad B = \frac{-X}{R^2 + X^2}$$

La conductividad sólo es igual al inverso de la resistencia cuando la reactancia es cero.

$$G = \frac{R}{R^2 + (0)^2} \Rightarrow G = \frac{1}{R}$$



¡Gracias por su Atención!

